JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 24, 324–329 (1978)

Eine varisolvente Familie, welche das Phänomen der konstanten Fehlerkurve zuläßt

KLAUS BARTKE

Mathematisches Institut, Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen, West Germany

Communicated by P. L. Butzer

Received May 17, 1977

Als Verallgemeinerung der N-Parameter-Familien (oder unisolventen Familien, siehe Tornheim [8], Curtis [3]) führte 1961 J. R. Rice [7], angeregt durch die Approximationseigenschaften der Rationalen Funktionen, den Begriff der varisolventen Familie ein:

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, m eine natürliche Zahl und $\mathscr{V} \subset \mathscr{C}[a, b]$.

Man sagt, *$\mathscr{V}$ besitzt die Eigenschaft Z vom Grad m in $v_0 \in \mathscr{V}$*, wenn für alle $v \in \mathscr{V}$ mit $v \neq v_0$ die Funktion $v - v_0$ höchstens $m - 1$ Nullstellen besitzt.

$\mathscr{V}$ heißt *lokal solvent vom Grad m in $v_0 \in \mathscr{V}$*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ und jede Wahl von m verschiedenen Punkten $x_1, \ldots, x_m$ in $[a, b]$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß für alle $y_1, \ldots, y_m$ mit $|v_0(x_i) - y_i| < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ein $v \in \mathscr{V}$ existiert, sodaß $v(x_i) = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, und $\| v - v_0 \|_\infty \leqslant \epsilon$ gilt.

$\mathscr{V}$ heißt *varisolvente Familie*, wenn für alle $v \in \mathscr{V}$ ein $m(v) \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß $\mathscr{V}$ die Eigenschaft Z vom Grad $m(v)$ in v besitzt, und $\mathscr{V}$ lokal solvent vom Grad $m(v)$ in v ist.

Gewöhnlich betrachtet man nur varisolvente Familien von beschränktem Grad. Ein wichtiges Ergebnis war folgende Charakterisierung:

Sei $\mathscr{V}$ eine varisolvente Familie und $f \in \mathscr{C}[a, b] \backslash \mathscr{V}$. v_0 ist genau dann beste Approximation zu f in $\mathscr{V}$, wenn die Fehlerfunktion $f - v_0$ $m(v_0)$-mal alterniert.

1968 wies C. Dunham [4] auf eine Lücke im Beweis dieses Satzes sowie des entsprechenden Satzes von Tornheim [8] hin, nämlich: Die Existenz einer konstanten Fehlerkurve läßt sich nicht ausschließen. Für die unisolventen Familien existieren Alternativbeweise von Novodvorskiĭ und Pinsker [6] sowie von Curtis [3], die diesen Fall unmöglich machen. Bei den varisolventen Familien war dies nur unter zusätzlichen Voraussetzungen möglich, von denen wir einige anführen wollen:

Dunham [4] erwähnt, daß eine konstante Fehlerkurve bei Familien mit folgender Dichteeigenschaft ausgeschlossen ist:

0021-9045/78/0244-0324$02.00/0

$\mathscr{V}$ besitzt die *Dichteeigenschaft*, wenn für alle $v \in \mathscr{V}$ und $\epsilon > 0$ Funktionen v_1 und v_2 in $\mathscr{V}$ existieren, sodaß $v - \epsilon < v_1 < v < v_2 < v + \epsilon$.

Diese Eigenschaft stellt sogar eine notwendige Bedingung dar: Seien $v \in \mathscr{V}$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Seien $f_1 := v - \epsilon/2$ und $f_2 := v + \epsilon/2$. Dann müssen v_1 und v_2 in $\mathscr{V}$ existieren, sodaß $\| v_i - f_i \|_\infty < \epsilon/2$ für $i = 1, 2$ gilt; denn sonst wäre v beste Approximation zu f_1 und f_2 mit konstanter Fehlerkurve. v_1 und v_2 erfüllen aber die gewünschten Eigenschaften.

Barrar und Loeb [1] zeigten, daß $v \in \mathscr{V}$ mit $m(v) = 1, 2$ oder 3 nicht Element bester Approximation mit konstanter Fehlerkurve sein kann, während D. Braess [2] im Fall, daß der Grad der Solvenz beschränkt ist, alle Elemente in $\mathscr{V}$ mit maximalem Grad $m(v)$ ausschloß. Schließlich zeigten Ling und Tornga [5], daß eine Existenzmenge keine konstante Fehlerkurve zuläßt.

Wir wollen nun ein einfaches Beispiel einer varisolventen Familie angeben, die das Phänomen der konstanten Fehlerkurve zuläßt. Dem Referenten sei an dieser Stelle für einige nützliche Hinweise gedankt.

BEISPIEL. Wir betrachten das Intervall $I := [-1, 1]$. Mit $\mathscr{P}_k$ bezeichnen wir die Menge der Polynome vom Grad $\leqslant k$, und für $p \in \mathscr{P}_k$ sei $n(p)$ die Anzahl der Nullstellen von p in I, der algebraischen Vielfachheit nach gezählt. Wir definieren nun eine Familie von Funktionen $\mathscr{V} \subset \mathscr{C}(I)$ wie folgt: Sei

$$\mathscr{V} := \{p \in \mathscr{P}_6 : n(p) \leqslant 3 \text{ und es ex. } x \in I, \text{ sodaß } p(x) > 0\} \cup \{0\}.$$

Die beste Approximation einer negativen Konstanten mittels $\mathscr{V}$ liefert trivialerweise eine konstante Fehlerkurve. Andererseits ist $\mathscr{V}$ eine varisolvente Familie:

Die Eigenschaft Z ist für die Nullfunktion vom Grade 4 erfüllt, für alle anderen Elemente aus $\mathscr{V}$ vom Grade 7. Wir müssen also nur noch die lokale Solvenz vom entsprechenden Grad nachweisen.

Sei $v \in \mathscr{V}\backslash\{0\}$. Dann folgt aus der Interpolationseigenschaft der Polynome, daß für jede Wahl der $x_1, \ldots, x_7$ in I und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß für $y_1, \ldots, y_7$ mit $| y_i - v(x_i)| < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant 7$, genau ein $v_1 \in \mathscr{P}_6$ existiert mit $v_1(x_i) = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant 7$, und $\| v^{(k)} - v_1^{(k)} \|_\infty < \epsilon$ für $0 \leqslant k \leqslant 3$. Ist $\delta > 0$ hinreichend klein, so gilt $n(v_1) \leqslant n(v)$, also $v_1 \in \mathscr{V}$, und damit ist die lokale Solvenz vom Grad 7 an der Stelle v gezeigt.

Um diese Eigenschaft vom Grad 4 an der Stelle 0 zu zeigen, wählen wir $x_1, \ldots, x_4$ beliebig in I sowei ein $\tau > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ derart, daß für $| y_i | < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, ein eindeutiges $f_0 \in \mathscr{P}_3$ existiert, welches $f_0(x_i) = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, sowie $\| f_0 \|_\infty \leqslant \tau$ erfüllt. Seien $y_1, \ldots, y_4$ gegeben, und es gelte $| y_i | < \delta$. Wir betrachten das Interpolationspolynom $f_0 \in \mathscr{P}_3$. Für alle $x \in I$ gelte o.B.d.A. $f_0(x) \leqslant 0$, denn sonst sind wir fertig. f_0 kann dann einfache und dreifache Nullstellen höchstens am Rand von I besitzen. Um eine interpolierende Funktion in $\mathscr{V}$ zu finden, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.

1. *f_0 besitze keine Nullstelle in I*

Es seien $f_1^+(x) := \prod_{i=1}^{4} (x - x_i)$ und $f_1^-(x) := -f_1^+(x)$. f_1 bezeichne eine der beiden Funktionen, welche den Wert $+\| f_1 \|_\infty$ annimmt. Dann existiert für die Funktionen

$$p_\lambda(x) := f_0(x) + \lambda f_1(x), \qquad \lambda \geqslant 0,$$

ein $\lambda_1 > 0$, sodaß $n(p_{\lambda_1}) > 0$ ist, und für $\lambda < \lambda_1$ gilt: $n(p_\lambda) = 0$. Besitzt nun p_{λ_1} genau eine Nullstelle ξ in I, gleich, welcher Vielfachheit, so ist für $\lambda_2 > \lambda_1$ hinreichend nah bei λ_1 die Funktion p_{λ_2} in $\mathscr{V}$, denn $p_{\lambda_2}(\xi) > 0$ und $n(p_{\lambda_2}) \leqslant 3$. Es gilt $\| p_{\lambda_2} \|_\infty < 3\tau$.

Besitzt p_{λ_1} mehr als eine Nullstelle in I, sagen wir ξ_1, ξ_2 und eventuell ξ_3, so definieren wir

$$q(x) := -\tfrac{1}{5}(x - \xi_1)^2 + 1.$$

Auf I gilt $q(x) > 0$, und q besitzt in ξ_1 ein absolutes Maximum mit dem Funktionswert 1. Setzen wir nun

$$r_\lambda(x) := f_0(x) + \lambda f_1(x)\, q(x), \qquad \lambda \geqslant 0,$$

dann besitzt r_{λ_1} in I genau eine Nullstelle in ξ_1, und wie oben erhalten wir ein $r_{\lambda_2} \in \mathscr{V}$, welches interpoliert und $\| r_{\lambda_2} \|_\infty < 3\tau$ erfüllt.

2. *f_0 besitze in I eine oder mehrere Nullstellen*

(a) Eine Nullstelle ξ_1 von f_0 sei kein Interpolationspunkt. O.B.d.A. gelte $f_1^+(\xi_1) > 0$. Dann liefert, unabhängig von der Existenz einer weiteren Nullstelle von f_0, die Funktion $f_0 + \lambda f_1^+$ für $\lambda > 0$ hinreichend klein ein interpolierendes Element in $\mathscr{V}$ mit Norm $< 2\tau$.

(b) Eine Nullstelle ξ_1 im offenen Intervall $]-1, 1[$ sei Interpolationspunkt. Auch in diesem Fall liefert eine Störung mit f_1 das Gewünschte.

(c) Einer der Randpunkte, o.B.d.A. -1, sei Nullstelle und Interpolationspunkt und $f_0(+1) < 0$.

(α) $x_4 < 1$: Wir können annehmen, daß die Nullstelle in -1 einfach ist, denn sonst stören wir einfach wieder mit f_1^-. Sei

$$s_\lambda := f_0 + \lambda f_1^+, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

f_1^+ ist in $]x_2, x_3[$ und in $]x_4, 1]$ positiv. Sei

$$\lambda_1 := \min\{\lambda > 0: s_\lambda \text{ besitzt in }]x_2, x_3[\cup]x_4, 1] \text{ eine Nullstelle}\}.$$

Es können drei Fälle eintreten:

(i) s_{λ_1} besitzt in $]x_2, x_3[$ eine doppelte Nullstelle und keine in $]x_4, 1]$. Dann sind wir fertig mit $\lambda_2 > \lambda_1$ hinreichend nah bei λ_1, und $\| s_{\lambda_2} \|_\infty < 3\tau$.

(ii) s_{λ_1} besitzt eine doppelte Nullstelle ξ_1 in $]x_2, x_3[$ und eine einfache in $+1$. Dann liefert $f_0 + \lambda_2 f_1^+ q$, q wie oben, das Verlangte, und die Norm ist wieder $<3\tau$.

(iii) s_{λ_1} besitzt keine Nullstelle in $]x_2, x_3[$. Ist die Nullstelle in $]x_4, 1]$ einfach oder doppelt, so liefert wieder s_{λ_2} das Gewünschte. Doch auch die letzte Möglichkeit einer dreifachen Nullstelle in $+1$ bereitet uns keine Schwierigkeiten, denn dann sind in einem hinreichend kleinen Intervall $]1 - \eta, 1[$ die Ableitungen s'_{λ_1} sowie $f_1^{+\prime}$ größer als 0, und es gilt hier $f_1^+ > 0$. Also gilt $n(s_{\lambda_2}) = 2$, und wieder ist $\| s_{\lambda_2} \|_\infty < 3\tau$.

(β) $x_4 = 1$: Dieser Fall läßt sich wie (α) (i) behandeln.

(d) Beide Randpunkte von I seien Nullstellen und Interpolationspunkte. O.B.d.A. seien beide Nullstellen einfach, denn sonst stören wir wieder mit f_1. Sei für $\lambda \geqslant 0$

$$t_\lambda := f_0 + \lambda f_1^-.$$

Es sei $\lambda_1 := \sup\{\lambda \geqslant 0: t'_\lambda(-1) \leqslant 0 \text{ und } t'_\lambda(+1) \geqslant 0\}$. Für alle $\lambda \in [0, \lambda_1[$ gilt $n(t_\lambda) = 2$. Denn sonst besäße für ein $\lambda^* < \lambda_1$ das Polynom t_{λ^*} in $\xi \in]x_2, x_3[$ ein relatives Maximum und eine Nullstelle, und Nullstellen in ± 1. Also wäre der x^4-Term von t_{λ^*} positiv. Dieser ist jedoch nach Konstruktion von t_λ negativ.

Verschwindet an einem der Endpunkte von I die Ableitung t'_{λ_1} zuerst, so liegt für $\lambda_2 > \lambda_1$ hinreichend nah bei λ_1 die Funktion t_{λ_2} in $\mathscr{V}$ und interpoliert. Andernfalls definieren wir

$$u_\lambda(x) := f_0(x) + \tfrac{1}{2}(1 - x)\, \lambda f_1^-(x).$$

Dann verschwindet u'_{λ_1}, während für alle $\lambda \geqslant 0$ gilt: $u'_\lambda(+1) = f'_0(+1) > 0$. Deshalb erhalten wir wie oben ein $u_{\lambda_2} \in \mathscr{V}$, welches interpoliert.

Wir schätzen nun $\| t_{\lambda_2} \|_\infty$ und $\| u_{\lambda_2} \|_\infty$ ab. Zunächst gilt $\| u_{\lambda_2} \|_\infty \leqslant \| t_{\lambda_2} \|_\infty$. Aus der Markov'schen Ungleichung erhalten wir $-f'_0(-1) \leqslant 9\tau$. Setzen wir $\nu := f_1^{-\prime}(-1)$, so erhalten wir $\lambda_1 \leqslant 9\tau/\nu$, und wir können $\lambda_2 < 10\tau/\nu$ wählen. So erhalten wir

$$\| s_{\lambda_2} \|_\infty \leqslant \tau + \frac{10\tau}{\nu} \| f_1^- \|_\infty = \tau \cdot \mu$$

mit $\mu := 1 + 160/\nu$, da $\|f_1^-\|_\infty < 16$ gilt. Ist nun $\epsilon > 0$ gegeben, so genügt es in allen Fällen,

$$\tau < \min\left\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon}{\mu}\right\}$$

zu wählen, um eine interpolierende Funktion in $\mathscr{V}$ zu erhalten, deren Norm kleiner als ϵ ist. Hiermit ist die Varisolvenz von $\mathscr{V}$ gezeigt.

Bemerkung. Man sieht sofort ein, daß die beste Approximation stetiger Funktionen mittels Elementen einer varisolventen Familie nicht eindeutig zu sein braucht. Sei hierzu

$$\mathscr{V}' = \mathscr{V} \cap \{f \in \mathscr{C}(I) : f(x) > -1 \text{ für alle } x \in I\}$$

und

$$\mathscr{W} := \{w \in \mathscr{C}(I) : -w - 1 \in \mathscr{V}'\} \cup \mathscr{V}'.$$

Es ist klar, daß auch $\mathscr{W}$ eine varisolvente Familie ist. 0 und 1 sind jedoch Elemente bester Approximation zu $-\frac{1}{2}$ in $\mathscr{W}$.

Man sieht auch leicht, daß die Elemente einer varisolventen Familie, die eine konstante Fehlerkurve zulassen, Häufungspunkte in $\mathscr{C}(I)$ besitzen können. Hierzu definieren wir für $\epsilon > 0$, $\mathscr{V}_\epsilon := \{v \in \mathscr{V} : \|v\|_\infty < \epsilon$ und es ex. $x \in I$, sodaß $v(x) < 0\}$.

Jedes $\mathscr{V}_\epsilon$ ist als Schnitt einer varisolventen Familie und einer offenen Menge wieder varisolvent, und sie approximiert beliebige konstante Funktionen $\neq 0$ mit konstanter Fehlerkurve. Sei nun

$$\mathscr{W}_1 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{v + \frac{1}{n} : v \in \mathscr{V}_{1/(n^2+n)}\right\}.$$

$\mathscr{W}_1$ ist wieder varisolvent, und 0 ist Häufungspunkt der konstanten Funktionen $(1/n) \in \mathscr{W}_1$.

LITERATUR

1. R. B. Barrar and H. L. Loeb, On n-parameter and unisolvent families, *J. Approximation Theory* **1** (1968), 180–181.
2. D. Braess, On varisolvency and alternation, *J. Approximation Theory* **12** (1974), 230–233.
3. Ph. C. Curtis, Jr., n-parameter families and best approximation, *Pacific J. Math.* **9** (1959), 1013–1027.
4. C. B. Dunham, Necessity of alternation, *Canad. Math. Bull.* **10** (1968), 743–744.
5. W. H. Ling and J. E. Tornga, The constant error curve problem for varisolvent families, *J. Approximation Theory* **11** (1974), 54–72.

6. E. N. Novodvorskiĭ and I. S. Pinsker, On a process of equalization of maxima, *Uspehi Mat. Nauk* **6** (1951), 174–181 (russisch).
7. J. R. Rice, Tchebycheff approximations by functions unisolvent of variable degree, *Trans. Amer. Math. Soc.* **99** (1961), 298–302.
8. L. Tornheim, On n-parameter families of functions and associated convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **69** (1950), 457–467.